EXERCICE N°1 : 30' 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1°) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.
Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

2°) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.

a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b) Montrer que $P\cap S$ est un cercle ζ de centre $J(2,3,0)$ dont on déterminera le rayon.

c) Déterminer $Q\cap S$.

3°) On donne les points $A(0,0,1)$ e, $B(0,1,2)$ et $C(2,2,5)$.

a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que pour tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}=2(x+y-z+1)$.

4°) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels $ABCM$ est un tétraèdre de volume égal à 2.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B *d'affixes* respectives $a=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1°) a) Construire, dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A et B.

b) Ecrire a et b sous forme algébrique.

2°) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

a) Déterminer l'affixe c du point C.

b) Vérifier que $c^2=1+2i\sqrt{6}$.

3°) On considère le point D d'affixe c^2.

a) Montrer que OD=5.

b) En déduire une construction du point D.

4°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-2z-i\sqrt{6}=0$.

On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par z_2 l'autre solution .

5°) Soit les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives $1, z_1$ et z_2.

a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment $[IC]$.

b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Construire les points M_1 et M_2.

EXERCICE N°3 :	50'	6,5 points	

A) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y=-x$.

2°) a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variation de *f*.

c) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ .pour tout $x\in]0,+\infty[$.

d) Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3°) a) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4°) Soit $x>0$.

a) Vérifier que $f\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) En remarque que $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}>1$, montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\le\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B) Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

1°) Donner une valeur approchée à 10^{-3} prés de u_3.

2°) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $k\in IN^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

c) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $u_n\le 1-\dfrac{1}{n+1}$.

d) En déduire que (u_n) est convergente vers un réel $\mathscr{L}$ et que $0,7<\mathscr{L}\le 1$.

EXERCICE N°4 : | **25'** | **3,5 points**

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances. On désigne par (X,Y) la série statistique double, où X est le sang de l'année et Y est le taux de mortalité infantile pour 1000 naissances.

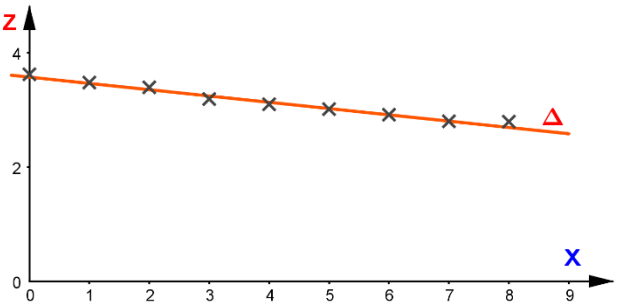
Année	1990	1993	1996	1999	2002	2005	2008	2011	2014
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux y_i	37,3	32,3	29,7	24,2	22,1	20,3	18,4	16,4	16,3

Source : INS 03-02-2016

1°) a) Déterminer, à 10^{-2} prés, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

b) Ecrire une équation de la droite de régression D de Y en X.
(Les coefficients seront arrondis au centième).

c) Utiliser cet ajustement pour le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.



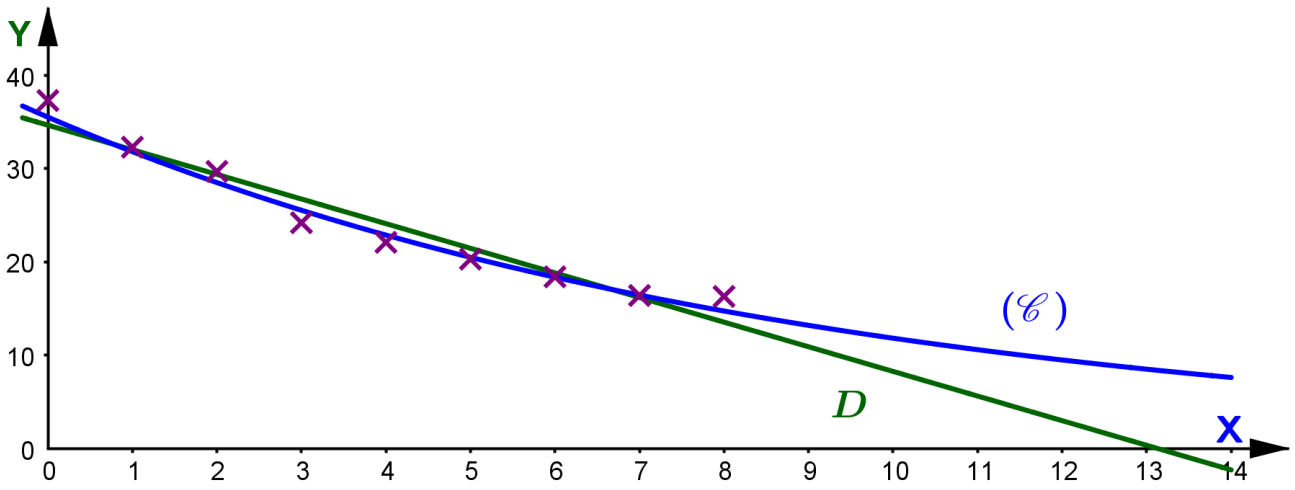
2°) On pose $Z=\ln(Y)$.

Dans la figure ci-contre, on a représenté le nuage de points de la série statistique (X,Z) et la droite de régression Δ de Z en X dont une équation est $z=-0,11x+3,57$.

a) Justifier qu'on peut modéliser le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances par la relation $y=35,52e^{-0,11x}$.

b) Estimer, à l'aide de cet justement, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

3°) Dans la figure ci-dessous, on a représenté la droite D définie en **1°) b)**, la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y=35,52e^{-0,11x}$ et le nuage de points de la série (X,Y).



Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable à la situation ?
Justifier la réponse.

Tél : +216 29 862 229 / +216 29 862 464 - Email : contact@takiacademy.com